Tema 2. Sistemas conservativos

Cuarta parte: Movimiento planetario. Satélites

A) Ecuaciones del movimiento

- Suponemos que uno de los cuerpos, de masa M mucho mayor que m, se encuentra en reposo en el origen de coordenadas O. El otro cuerpo, de masa m, se mueve debido a la acción del campo gravitatorio creado por M. La ecuación del movimiento para la masa m es

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})}$$

donde

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r}$$

siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario radial que sale de M.

- Siendo la fuerza gravitatoria una fuerza central, el movimiento de la masa m se realiza en un plano perpendicular a la dirección del momento angular respecto a O, vector que se conserva constante. Además se satisface la ley de las áreas, y se conserva la energía total E de la masa m.

B) Órbitas planetarias: Descripción analítica

- Según la 2ª fórmula de Binet, la ecuación de la trayectoria, en coordenadas polares (r, f) centradas en O, es

$$\boxed{r = \frac{L^2}{GMm^2}\frac{1}{1+e\cos f}}$$

Aquí, e es la excentricidad de la órbita, determinada por los dos parámetros fundamentales del movimiento orbital, la energía total E y el módulo L del momento angular. Para obtener su valor, evaluamos la energía total

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

para la órbita anterior. Al ser la velocidad radial

$$\dot{r} = \frac{GMm}{L}e\sin f$$

encontramos que

$$E = \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}(e^2 - 1)$$

por lo que la excentricidad de la órbita vale

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 m^3}}}$$

- El tipo de trayectoria depende exclusivamente del valor de la energía total. Cuando $E < 0$, $e < 1$, la trayectoria es una elipse. La masa m se encuentra atrapada en el campo gravitatorio de M. Un caso particular corresponde al movimiento circular con excentricidad nula. Si $E = 0$, $e = 1$, tenemos una parábola. La masa m llega al infinito con velocidad nula. Si $E > 0$, $e > 1$, tenemos una hipérbola. La masa m llega al infinito con velocidad distinta de cero.

C) Órbitas planetarias: Descripción gráfica

- Utilizamos el concepto de potencial efectivo. En este caso

$$\boxed{U_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}}$$

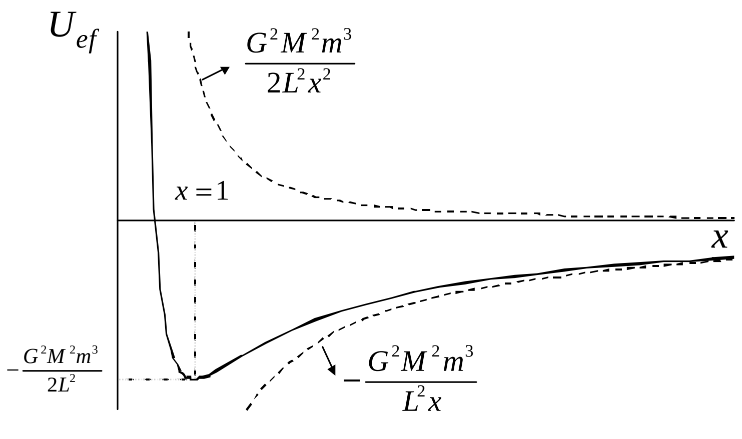
Según la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares, r tiene las dimensiones del cociente $\frac{L^2}{GMm^2}$. Es conveniente definir la variable adimensional x en la forma

$$\boxed{r = \frac{L^2}{GMm^2} x}$$

con lo cual el potencial efectivo queda expresado como

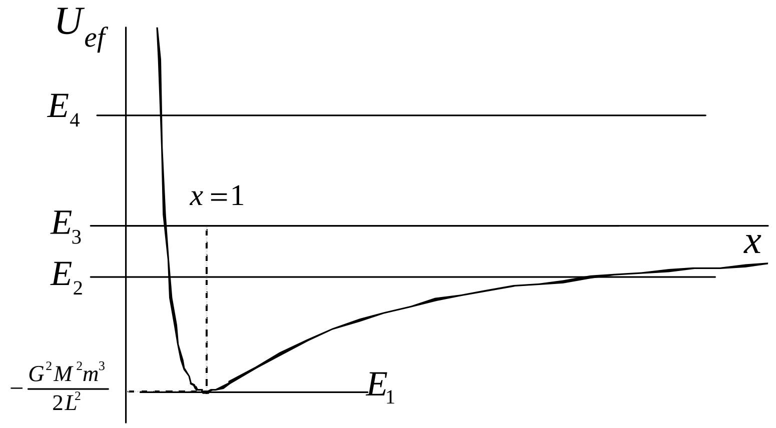
$$\boxed{U_{ef} = \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)}$$

La gráfica correspondiente



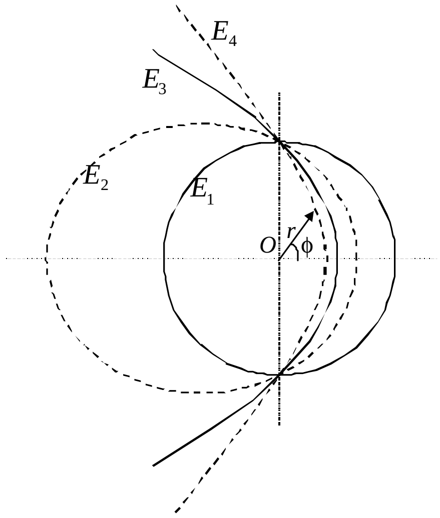
muestra que para valores pequeños de x predomina el potencial centrífugo, que no permite que la masa m se acerque al origen, donde se sitúa la masa M, mientras que para valores grandes de x el potencial gravitatorio es más importante, dificultando que la masa m se escape al infinito. El mínimo del potencial se produce en el punto $x=1$. Por tanto, en la región $x<1$, el potencial efectivo decrece, y la fuerza resultante es repulsiva, mientras que en la región $x>1$, el potencial efectivo crece, y la fuerza resultante es atractiva.

- Pasamos ahora a determinar las trayectorias posibles dependiendo del valor de la energía total. Para ello dibujamos de nuevo el potencial efectivo y una trayectoria de energía definida E.



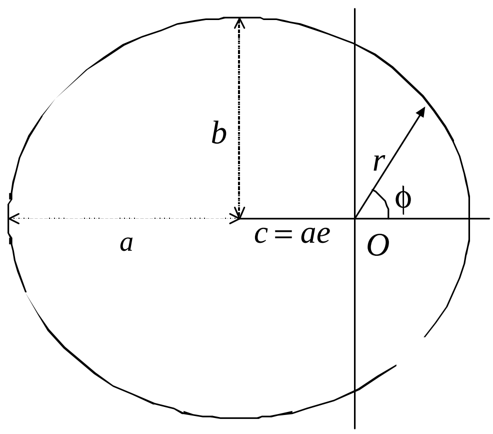
Si la energía es menor que el mínimo del potencial, no existe movimiento posible. Cuando la energía es igual a E_1, igual al mínimo del potencial, la única región donde puede encontrarse la masa m es la circunferencia $x=1$. La trayectoria es una circunferencia de radio $\frac{L^2}{GMm^2}$, que se recorre a velocidad constante $\frac{GMm}{L}$. Si la energía es igual a E_2, mayor que el mínimo de potencial, pero menor que cero, existen dos puntos de retroceso, y la trayectoria es una elipse, contenida entre las dos circunferencias correspondientes a dichos puntos de retroceso. Si la energía es igual a $E_3=0$, sólo existe un punto de retroceso, y la masa m puede llegar al infinito con velocidad nula, describiendo una parábola. Si la energía es igual a E_4 mayor que cero, sólo existe un punto de retroceso y la masa m puede llegar al infinito con velocidad no nula, describiendo una rama de hipérbola.

- Las trayectorias correspondientes a estos valores definidos de la energía se dibujan en la siguiente gráfica



y se estudian individualmente.

a) Órbita elíptica



- A partir del conocimiento de L y E, obtenemos los parámetros que caracterizan una elipse: la excentricidad e y el semieje mayor a. Los *puntos apsidales* son los puntos de la trayectoria donde la velocidad radial se hace cero. Corresponden a las posiciones de máximo y mínimo alejamiento del centro de fuerzas O. El *perigeo* o distancia de mínimo alejamiento corresponde a la posición angular $f = 0$, y según la figura vale

$$r_P = a - c = a - ae = a(1 - e)$$

El *apogeo* o distancia de máximo alejamiento corresponde a la posición angular $f = p$, y según la figura vale

$$r_A = a + c = a + ae = a(1 + e)$$

El semieje menor b está dado por

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$

El área de la elipse es

$$S = pab = pa^2\sqrt{1 - e^2}$$

- La ecuación de la trayectoria, en virtud de la definición de los puntos apsidales, puede escribirse como

$$\boxed{r = a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos f}}$$

donde, como en el caso general, la excentricidad vale

$$e = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$$

- Queda por determinar el semieje mayor de la órbita a. Utilizando el hecho de que en un punto apsidal la energía cinética radial es nula, y la energía total es igual al potencial efectivo evaluado en dicho punto, junto con la igualdad

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{GMm^2}$$

obtenemos en el perigeo el valor de la energía total

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Es una de las propiedades fundamentales del potencial gravitatorio, la energía es independiente del valor del momento angular.

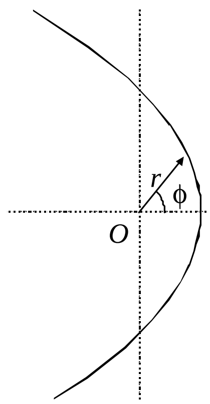
- Por ultimo, la relación entre la velocidad y la coordenada radial sobre la trayectoria puede obtenerse a partir de la conservación de la energía

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$V^2 = \frac{GM}{a}\left(2\frac{a}{r}-1\right)$$

Todas estas fórmulas son válidas en un movimiento circular, para el que la excentricidad es nula.

b) Órbita parabólica



- En este caso, la excentricidad es igual a 1. La ecuación de la trayectoria es

$$\boxed{r = p\frac{1}{1+\cos f}}$$

siendo

$$\boxed{p = \frac{L^2}{GMm^2}}$$

el llamado *semilatus rectum.* No existe distancia de máximo alejamiento, ya que

$$r \to \infty \ \text{ si } \ f = p$$

pero sí existe una distancia de mínimo acercamiento, o perigeo, cuyo valor es

$$r_P = \frac{p}{2}$$

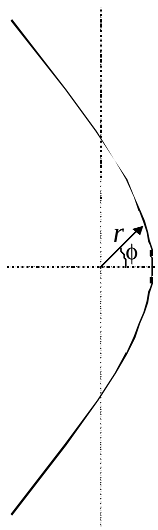
- La energía total es cero, y la velocidad se relaciona con la coordenada radial sobre la órbita según la fórmula

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} \\ V^2 = 2\frac{GM}{r} \end{array}}$$

Se observa que la partícula llega al infinito con velocidad nula, ya que

$$V \to 0 \quad \text{si} \quad r \to \infty$$

c) Órbita hiperbólica



- La ecuación de la trayectoria es

$$\boxed{r = a\frac{e^2-1}{1+e\cos f}}$$

con excentricidad $e > 1$, siendo válida como en el caso general la fórmula

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$$

Para esta trayectoria la energía total es mayor que cero, en particular

$$\boxed{E = \frac{GMm}{2a}}$$

De aquí, la relación entre la velocidad y la coordenada radial se expresa

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{GMm}{2a} = \dfrac{1}{2}mV^2 - \dfrac{GMm}{r} \\ V^2 = \dfrac{GM}{a}\left(2\dfrac{a}{r} + 1\right) \end{array}}$$

La masa m llega al infinito con velocidad no nula

$$V = \frac{GM}{a} \quad \text{si} \quad r \to \infty$$

- No existe distancia de máximo alejamiento, pero sí existe una distancia de mínimo alejamiento, o perigeo, con el valor

$$r_P = a(e-1)$$

D) Leyes de Kepler

- La primera ley establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

- La segunda ley es la ley de las áreas, ya estudiada.

- La tercera ley establece que los cuadrados de los períodos de revolución sobre las órbitas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores. *Demostración*

Si T es el período orbital, y el área de la elipse de semiejes a y b, es $S = pa^2\sqrt{1-e^2}$, por la ley de las áreas obtenemos la relación

$$\frac{L}{2m} = \frac{pa^2}{T}\sqrt{1-e^2}$$

Por otro lado, sabemos que en una órbita elíptica se satisface

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{GMm^2}$$

De estas dos ecuaciones, eliminando L y e, obtenemos

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4p^2}}$$